ランダウ=リフシッツ著
「理論物理学教程 力学 (増訂第3版)」
へのノート

Teisuke Jin

2011 年 9 月 8 日

概 要

ランダウ=リフシッツ著, 広重徹・水戸巌訳「理論物理学教程 力学 (増訂第 3 版)」(1987 年 4 月 30 日 第 15 刷) 東京図書株式会社の, 私的正誤表を含むノート.

- p. 37, ↓12: (9.6) ⇒ (9.8)

- p. 41, ↓11: $\dfrac{M_z^2}{2ml^2\sin\theta} \Rightarrow \dfrac{M_z^2}{2ml^2\sin^2\theta}$

- p. 41, ↑4: $\dfrac{m}{2}(\dot{r}+ \Rightarrow \dfrac{m}{2}(\dot{r}^2+$

- p. 48, ↓14: b) では (14.7) を使った後, $\varphi \to -\varphi$ と変換する.

- p. 48, ↑8: $\dfrac{M^2}{m^2} \Rightarrow \dfrac{M^2}{2m}$

- p. 55, ↓3: $\dfrac{m_2}{m_1+m\ {}_2} \Rightarrow \dfrac{m_2}{m_1+m_2}$

- p. 56, ↓1: $\dfrac{m_2}{m\ \ +m_2} \Rightarrow \dfrac{m_2}{m_1+m_2}$

- p. 57, ↓6: $\boldsymbol{p}_1'$ と $\boldsymbol{p}_2'$ と互いに反対向き ⇒ $\boldsymbol{p}_1'$ と $\boldsymbol{p}_2'$ は互いに反対向き

- p. 61, ↑6, ↑2: $0 \le \theta_1, \theta_2 \le \pi/2$ ゆえ, $\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$ には絶対値をつけなくてもよい.

- p. 63, ↑4: 式 (18.2), (18.2) は ⇒ 式 (18.1), (18.2) は

- p. 64, ↓13: $\dfrac{\chi'(x)dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w_2} - x}} \Rightarrow \dfrac{\chi'(x)dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2} - x}}$

- p. 66, ↑12: $\dfrac{2m_1}{m_1 + m_{\;}{}_{{}_{2}}} \Rightarrow \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}$

- p. 81, ↓11, ↑6, p. 83, ↑4, ↑1, p. 95, ↑5: 「正確定」は positive definite の訳語であろう. 現代では正定値, 正値などと呼ぶのが一般的.

- p. 83, ↑13: 一般に $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{pmatrix}$ とおく. B の i 行目と k 列目を削った行列を B_{ik} とし, $\tilde{b}_{ik} = (-1)^{i+k} |B_{ik}|$ と定めたとき, $\tilde{b}_{ik}$ を余因子 (cofactor) という. 次の性質がよく知られている:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \cdots & \tilde{b}_{s1} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{b}_{1s} & \cdots & \tilde{b}_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B| & & O \\ & \ddots & \\ O & & |B| \end{pmatrix}.$$

余因子からなる行列を $\tilde{B}$ と表すと, $|B||\tilde{B}| = |B|^s$ を導ける.

さて, 教科書に沿って

$$b_{ik} = -\omega_\alpha^2 m_{ik} + k_{ik}$$

とおく. $|B| = 0$ だから

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \cdots & \tilde{b}_{s1} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{b}_{1s} & \cdots & \tilde{b}_{ss} \end{pmatrix} = O.$$

あとで示すように, ある i_0 について $(\tilde{b}_{i_0 1}, \ldots, \tilde{b}_{i_0 s}) \neq 0$ とできる. よって

$$\varDelta_{k\alpha} = \tilde{b}_{i_0 k} \qquad (k = 1, \ldots, s)$$

とおけば次を得る:

$$\sum_k (-\omega_\alpha^2 m_{ik} + k_{ik}) \varDelta_{k\alpha} = 0.$$

最後に $\forall \tilde{b}_{ik} = 0$ と仮定して矛盾を導く. 以降 $b_{ik} = -\omega^2 m_{ik} + k_{ik}$ と定義したときの $|B||\tilde{B}| = |B|^s$ について考える. 各 $\tilde{b}_{ik}$ は $\omega^2 - \omega_\alpha^2$ で割りきれるので $|\tilde{B}|$ は $(\omega^2 - \omega_\alpha^2)^s$ で割りきれ, $|B||\tilde{B}| = |B|^s$ は $(\omega^2 - \omega_\alpha^2)^{s+1}$ で割りきれるから, 結局 $|B|$ は $(\omega^2 - \omega_\alpha^2)^2$ で割りきれることになり, 単根であることに矛盾.

なお, 教科書の「小行列式」の用語は現代では少し違う意味で使うのが普通.

- p. 90, ↓7: $-\frac{k_1}{4}Q_s^2 \Rightarrow -\frac{k_1}{4}Q_s^2$

- p. 92, ↓2: $y = -y_3 \Rightarrow y_1 = -y_3$

- p. 109, ↓9: $\dfrac{a^2}{16\omega_0^2}\left(\dfrac{a^2}{3\omega_0^2}+\dfrac{\beta}{2}\right) \Rightarrow \dfrac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\dfrac{\alpha^2}{3\omega_0^2}+\dfrac{\beta}{2}\right)$

- p. 116, ↓10: $A/k \Rightarrow A/\kappa$

- p. 117, ↑4: $\xi\overline{\dfrac{\partial f}{\partial X}} \Rightarrow \overline{\xi\dfrac{\partial f}{\partial X}}$

- p. 118, ↓5: $\overline{\dot{\xi}}^2 \Rightarrow \overline{\dot{\xi}^2}$

- p. 118, ↓12: (30.10) の導出方法がわからない.

- p. 122, ↑4: もちろん　, この ⇒ もちろん, この

- p. 124, ↑4: 対角型に直せる理由がわからない.

- p. 131, ↓5: 直線に垂直な直線 OA ⇒ 直線 OA に垂直な直線

- p. 131, ↓12: $I_2 \Rightarrow I_3$

- p. 141, ↓4: $p_\varphi = M_z$ の証明.

$x_1x_2x_3$ 座標に固定された質量 m の質点の, Z 軸方向の角運動量 M_z と Lagrangian を考える.

$x_1x_2x_3$ 座標で, 質点の円柱座標を (r, α, s) と定めて固定する.

$$x_1 = r\cos\alpha, \quad x_2 = r\sin\alpha, \quad x_3 = s.$$

質点の XYZ 座標は次のようになる.

$$\begin{cases} X = r\cos(\alpha+\psi)\cos\varphi - (r\sin(\alpha+\psi)\cos\theta - s\sin\theta)\sin\varphi, \\ Y = r\cos(\alpha+\psi)\sin\varphi + (r\sin(\alpha+\psi)\cos\theta - s\sin\theta)\cos\varphi, \\ Z = r\sin(\alpha+\psi)\sin\theta + s\cos\theta \end{cases}$$

従って角運動量 M_z は

$$\begin{aligned} M_z &= m\left(X\dot{Y} - Y\dot{X}\right) \\ &= m\dot{\psi}\left\{r^2\cos\theta - rs\sin(\alpha+\psi)\sin\theta\right\} \\ &\quad + m\dot{\varphi}\left\{r^2\cos^2(\alpha+\psi) + (r\sin(\alpha+\psi)\cos\theta - s\sin\theta)^2\right\} \\ &\quad - m\dot{\theta}r\cos(\alpha+\psi)(r\sin(\alpha+\psi)\sin\theta + s\cos\theta). \end{aligned}$$

一方, 運動エネルギー T は

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{m}{2}\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2\right)\\
&= \frac{m}{2}\dot{\psi}^2 r^2\\
&\quad + \frac{m}{2}\dot{\varphi}^2\left\{r^2\cos^2(\alpha+\psi)+(r\sin(\alpha+\psi)\cos\theta - s\sin\theta)^2\right\}\\
&\quad + \frac{m}{2}\dot{\theta}^2\left\{r^2\sin^2(\alpha+\psi)+s^2\right\}\\
&\quad + m\dot{\psi}\dot{\varphi}\left\{r^2\cos\theta - rs\sin(\alpha+\psi)\sin\theta\right\}\\
&\quad - m\dot{\psi}\dot{\theta}rs\cos(\alpha+\psi)\\
&\quad - m\dot{\varphi}\dot{\theta}r\cos(\alpha+\psi)(r\sin(\alpha+\psi)\sin\theta - s\cos\theta).
\end{aligned}
$$

以上より, Lagrangian L を $\dot{\varphi}$ で偏微分すると次を得る.

$$
p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = M_z.
$$

- p. 148, ↓9: ちじまる ⇒ ちぢまる

- p. 148, ↑5: 2 つの式 (37.2), (37.3) を ⇒ 2 つの式 (37.2) を

- p. 154, ↓7∼9: 式番号 (1) を付加.

- p. 154, ↓13: (37.61) ⇒ (37.16)

- p. 157, ↓8: 条件付き極値を見いだすためのラグランジュの一般的な方法とは, Lagrange の未定乗数法のこと.

- p. 164, ↓9: $\boldsymbol{v}_0 = 0$ とおくと ⇒ $\boldsymbol{v}_0 = 0$, $h_x = h_y = 0$ とおくと

- p. 183, ↓12, 15: ハルトニアン ⇒ ハミルトニアン

- p. 184, ↓5: 7 行目から 9 行目の理屈にしたがい, f, g, p, q, P, Q はいずれも時間を陽に含んでいないとする.

1 次元の場合. すなわち $p, q, P, Q \in \mathbb{R}$ のとき. 変数変換により

$$
\{fg\}_{p,q} = \{PQ\}_{p,q}\{fg\}_{P,Q}
$$

を得る. よって $\{PQ\}_{p,q} = 1$ を示せばよい. 式 (45.7) を用いると

$$
\begin{aligned}
\{PQ\}_{p,q} &= \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}\\
&= -\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial Q}(q, Q(p,q))\cdot\frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial q}(q, Q(p,q))\cdot\frac{\partial Q}{\partial p}\\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}.
\end{aligned}
$$

ここで式 (45.7) の $p = \partial F/\partial q$ を用いると

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_q \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_q = 1$$

を得る. ただし添字の q は q を定数としたときの偏微分を表す.
一般次元の場合. 変数変換により, 式 (45.10) を示せば十分なことがわかる. 母関数を使うことで, 式 (45.10) の 3 つのいずれかを示せば他の 2 つを示せることもわかるが, このことは必ずしも必要ではない.

9∼10 行目の理屈を借用し, $H = P_i$ とおくと, Hamilton 方程式を解いて

$$Q_i = t + t_0, \quad Q_j = \text{const.}\,(\forall j \neq i).$$

式 (42.1) に $f = Q_k$ を代入すれば $\{P_i Q_k\}_{p,q} = \delta_{ik}$ を得る. 他も同様.

- p. 184, ↓11: $\{fg\}_{p,q} = df/dt \Rightarrow \{fg\}_{p,q} = -df/dt$

- p. 185, ↑4∼1: このことの証明.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(Q_1,\ldots,Q_s,P_1,\ldots,P_s)}{\partial(q_1,\ldots,q_s,P_1,\ldots,P_s)} &= \begin{vmatrix}
\frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_s} & \frac{\partial Q_1}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial P_s} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial Q_s}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_s}{\partial q_s} & \frac{\partial Q_s}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial Q_s}{\partial P_s} \\
\frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial q_s} & \frac{\partial P_1}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial P_s} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial P_s}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_s}{\partial q_s} & \frac{\partial P_s}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial P_s}{\partial P_s}
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
\frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_s} & \frac{\partial Q_1}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial P_s} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial Q_s}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_s}{\partial q_s} & \frac{\partial Q_s}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial Q_s}{\partial P_s} \\
0 & \cdots & 0 & 1 & & O \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & O & & 1
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
\frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_s} \\
\vdots & & \vdots \\
\frac{\partial Q_s}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_s}{\partial q_s}
\end{vmatrix} = \left\{\frac{\partial(Q_1,\ldots,Q_s)}{\partial(q_1,\ldots,q_s)}\right\}_{P=\text{const}}.
\end{aligned}$$

- p. 186, ↑5: 3 次元 ⇒ 4 次元

- p. 194, ↑5∼2: 細かくいうと, E を消去するように差し引く.

- p. 195, ↓9: $\dfrac{\alpha_1 + a_2}{\sigma} \Rightarrow \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sigma}$, $\dfrac{a_1 - \alpha_2}{\sigma} \Rightarrow \dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sigma}$

- p. 195, ↓15: $p_z\rho^2 \Rightarrow p_z^2\rho^2$

- p. 199, ↑7: $I = 0 \Rightarrow \dot{I} = 0$

- p. 201, ↓14: $\left(\dfrac{\partial w}{\partial \omega}\right)_q \Rightarrow \left(\dfrac{\partial w}{\partial \omega}\right)_{q,I}$

- p. 204, ↓16: $e^{\alpha t} \Rightarrow e^{-\alpha t}$

- p. 204, ↓17: $\mathrm{Im}\,\omega_0 \Rightarrow \mathrm{Im}\,w_0$

- p. 204, ↓16∼17: $\int \omega dt$ を計算するには $\frac{1+ae^{\alpha t}}{1+e^{\alpha t}} = u^2$ と置換積分すればよい. 積分路は以下のような複素平面内の線分にする.

$$\int_{-\frac{1}{\alpha}\log a}^{-\frac{1}{\alpha}\log a + \frac{\pi i}{\alpha}} \omega\, dt, \qquad \int_0^{\frac{\pi i}{\alpha}} \omega\, dt.$$

置換後の積分路に注意すると, $\int \omega dt$ の虚部が求まる.

- p. 205, ↑9: $I_i = 0 \Rightarrow \dot{I}_i = 0$

- p. 207, ↑6: 1 価関数でない理由.
  $w_i = \frac{\partial E}{\partial I_i} t + c_i$ と $w_k = \frac{\partial E}{\partial I_k} t + c_k$ を得た後, $t = t_0$ で (p, q) に対応させるために定数項を調整する必要がある. そのとき定数項に $+2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) の任意性があるため, (52.13) は無限の多価関数になる.

- p. 207, ↑2: $w_1 n_2 - w_2 n_1 \Rightarrow w_1 n_1 - w_2 n_2$

- p. 208, ↑10: $(\partial S_0/\partial \lambda)_I \Rightarrow (\partial S_0/\partial \lambda)_{q,I}$

- p. 209, ↑9: $\dfrac{2}{2\pi} \Rightarrow \dfrac{2}{2\pi}$

- p. 209, ↑7: $ma^2 \Rightarrow m\alpha^2$