線形代数学続論 レポート問題 6

http://sfdx.net/ku

提出先はレポートボックス. 提出期間は授業翌日から次回授業開始時まで.

問 1　次の行列について以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) 固有値を求めよ.

(2) $(A - \lambda E)\mathbb{u} = 0$ の解空間の基底 $\mathbb{v}_1$, $\mathbb{v}_2$ を求めよ.

(3) $(A - \lambda E)\mathbb{u} = c_1\mathbb{v}_1 + c_2\mathbb{v}_2$ について, 解けるときの右辺 $\mathbb{u}_1$, 解けないときの右辺 $\mathbb{u}_3$ を答えよ.

(4) $(A - \lambda E)\mathbb{u}_2 = \mathbb{u}_1$ の解 $\mathbb{u}_2$ を 1 つ求めよ.

(5) $P = (\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \mathbb{u}_3)$ と $P^{-1}AP$ を答えよ.

問 2　以下の問に答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2$ を計算せよ.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$ を計算せよ.

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$ を計算せよ.

(4) 4 次正方行列 A の固有値を λ, μ とする ($\lambda \neq \mu$). A を Jordan 標準形にしたとき, 次のようになるとする.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

A の最小多項式は $\psi_A(x) = (x - \lambda)^2(x - \mu)$ となることを示せ. (ヒント: $P^{-1}(A - \lambda E)(A - \mu E)P \neq O$ となることと, $P^{-1}(A - \lambda E)^2(A - \mu E)P = O$ を示す)

補足　問 2(4) を一般化すると, 正方行列 A の固有値 λ_j の Jordan ブロックの最大サイズと, 最小多項式の λ_j の重複度が一致することがわかる.

. . . .

一般的なレポートの書き方　特に指定されない場合, レポートを作成するときは以下のようにするとよい.

- 課題名, 学籍番号, 氏名を必ず書く.
- レポート用紙が望ましいが, 違う紙を使う場合でも必ず片面のみに書く.
- サイズは A4 か B5 にし, 極端に大きい紙や小さい紙は避ける.
- 複数枚の時は必ず綴じる. 綴じるのは左上のみでよい.
- 文章は, 読み手がいることを意識して書くこと.
- 参考文献があるなら必ず明記すること. 丸写しは禁止.