線形代数学続論 レポート問題 4 http://sfdx.net/ku

提出先はレポートボックス. 提出期間は授業翌日から次回授業開始時まで.

問 1 A を正規行列とするとき, 異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する. 以下に従ってこのことを証明せよ. 以下 A を正規行列, すなわち $AA^* = A^*A$ を満たす正方行列とする. $(A^* = {}^t\overline{A})$

(1) λ を適当な複素数, $\mathbb{u}$ を適当な複素ベクトルとするとき, 次の等式が成りつことを示せ. 内積は複素の標準内積とする.

$$((\lambda E - A)\mathbb{u}, (\lambda E - A)\mathbb{u}) = ((\overline{\lambda} E - A^*)\mathbb{u}, (\overline{\lambda} E - A^*)\mathbb{u}).$$

(ヒント: 一般に $(A\mathbb{x}, \mathbb{y}) = (\mathbb{x}, A^*\mathbb{y})$) が成り立つ)

(2) A のある固有値を λ, それに対応する固有ベクトルを $\mathbb{u}$ とする. このとき $\overline{\lambda}$ は A^* の固有値になり, $\mathbb{u}$ は対応する固有ベクトルになることを示せ. (ヒント: $\|(\overline{\lambda} E - A^*)\mathbb{u}\|^2$ を計算)

(3) A の相異なる固有値を λ, μ, それぞれに対応する固有ベクトルを $\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ とする. $\mathbb{u}$ と $\mathbb{v}$ が直交することを示せ. (ヒント: 実対称行列や Hermite 行列と同様)

補足. 直交性は講義で説明した $\mathbb{C}^n = W_\lambda + W_\lambda^\perp$ から容易に示せるが, 直接にもこの問のように示せる.

問 2 A を実対称行列で正定値とする. 以下に従って $B^2 = A$ を満たす正定値の実対称行列 B が存在することを示せ.

(1) A の対角化を利用して, $B^2 = A$ を満たす B が存在することを示せ.

(2) B が対称行列かつ正定値にとれることを示せ.

. . . .

一般的なレポートの書き方 特に指定されない場合, レポートを作成するときは以下のようにするとよい.

- 課題名, 学籍番号, 氏名を必ず書く.
- レポート用紙が望ましいが, 違う紙を使う場合でも必ず片面のみに書く.
- サイズは A4 か B5 にし, 極端に大きい紙や小さい紙は避ける.
- 複数枚の時は必ず綴じる. 綴じるのは左上のみでよい.
- 文章は, 読み手がいることを意識して書くこと.
- 参考文献があるなら必ず明記すること. 丸写しは禁止.